RESSOURCES POUR FAIRE LA CLASSE

LE NOMBRE AU CYCLE 2

MATHÉMATIQUES

scérén
CNDP-CRDP

Partie 1

Dialectique entre sens et techniques, l'exemple du calcul mental

Denis Butlen et Pascale Masselot

Ce texte se propose d'éclairer certains éléments des programmes de mathématiques, et notamment ceux qui concernent les apprentissages numériques au cycle 2, d'un double point de vue : celui des relations entre sens et techniques, et celui des passages et des étapes incontournables d'un enseignement de mathématiques à l'école primaire. Ces deux entrées sont à considérer lors de la conception d'une programmation cohérente sur un niveau, un cycle, ou même plusieurs. Il est important de prendre en compte les résultats des recherches en didactique des mathématiques pour d'une part, faire des choix *a priori* (programmations, progressions, temps accordé à l'apprentissage, situations de référence, marges de manœuvre des enseignants, etc.) et pour, d'autre part, comprendre ce qui se joue dans une classe lors de la mise en œuvre des séances (adaptations, régulations, aides, prise en compte des erreurs, des obstacles, outils pour les analyser, etc.).
Les liens qui existent entre maîtrise des techniques de calcul, connaissances sur les nombres et les opérations, et résolution de problèmes numériques sont d'abord précisés. Puis des exemples de situations de référence dans le domaine du calcul mental et de la numération sont développés.

Relations entre maîtrise de techniques de calcul, connaissances sur les nombres et les opérations, et résolution de problèmes arithmétiques

Cette première partie constitue une synthèse de résultats issus de plusieurs recherches menées sur ce thème. Ici la question du lien entre sens et techniques est étudiée plus particulièrement à partir de l'enseignement du calcul mental.
En effet, le calcul mental apparaît comme un champ d'expérience particulièrement riche pour la construction de connaissances relatives aux nombres et aux opérations. L'analyse des effets d'un enseignement de calcul mental, à l'école primaire et au collège a permis de montrer comment maîtrise de techniques de calcul et connaissances sur les nombres et les opérations, se développent en étroite relation.
Deux résultats suffisamment emblématiques permettent d'étayer cette idée. Le premier porte sur la manière dont connaissances sur les nombres et les opérations, et maîtrise de techniques de calcul mental, se développent dialectiquement. Le second concerne les effets d'une pratique de calcul mental sur les performances des élèves relatives à la résolution de problèmes numériques standards.

Retour au sommaire

Le paradoxe de l'automatisme

Pour expliciter ce paradoxe, il convient de distinguer procédure automatisée et automatisme.
Une procédure est automatisée quand elle est restituée par l'élève pour effectuer un calcul sans que celui–ci la reconstruise (Fischer 1987, Boule 1997).
Selon le contexte, un automatisme correspond soit au recours à un ensemble de procédures automatisées installées en mémoire et ayant fait l'objet d'un enseignement ou d'une pratique préalable ; soit à un comportement se caractérisant par une mobilisation quasi systématique de l'élève d'un seul type de procédure quelles que soient les données numériques du calcul à effectuer.
Par exemple pour effectuer le calcul de 45 + 17, les procédures possibles sont les suivantes :
– simulation mentale de l'algorithme écrit, l'élève « pose dans sa tête » l'opération en colonnes :
– utilisation de la décomposition additive canonique de l'un ou des deux termes :
45 + 17 = 45 + 10 +7 = 55 + 7 = 62 **ou** 45 + 17 = 40 + 5 + 10 + 7 = 50 + 12 = 62 ;
– utilisation d'une décomposition additive de l'un des termes s'appuyant sur un passage à une dizaine supérieure :
45 + 17 = 45 + 5 + 12 = 50 + 12 = 62 **ou** 45 + 15 + 2 = 60 + 2 = 62 **ou** 2 + 43 + 17 = 2 + 60 = 62 ;
– utilisation d'une décomposition soustractive de l'un des termes :
45 + 20 – 3 = 65 – 3 = 62 ;
– etc.
Ces procédures se différencient par les connaissances mobilisées, le coût en mémoire et en calcul. L'algorithme écrit simulé mentalement mobilise peu de connaissances sur les propriétés des nombres en jeu mais en revanche, il est très coûteux car il nécessite de mémoriser beaucoup de données. Les procédures basées sur des décompositions canoniques (nombres de dizaines et d'unités) nécessitent de connaître des décompositions souvent fréquentées. Plus économiques que la précédente, elles restent coûteuses. Les deux derniers types de procédures réduisent le coût en mémoire et en calculs intermédiaires mais nécessitent la disponibilité de décompositions moins souvent fréquentées. De plus, très liées aux nombres en jeu, elles ne peuvent être mobilisées dans tous les calculs.
Des recherches ont montré que les procédures mobilisées par les élèves de fin de cycle 2, sont l'algorithme écrit « posé dans la tête » (procédure quasi majoritaire), les différentes procédures mobilisant des décompositions canoniques et, beaucoup plus rarement, celles mobilisant d'autres décompositions additives ou soustractives. Ces dernières nécessitent une prise en compte de la spécificité des nombres intervenant dans le calcul et de leurs propriétés, leur domaine de validité est limité. Un enseignement spécifique préalable semble donc nécessaire.
Les élèves préfèrent, dans un premier temps, utiliser des procédures sûres (qui fonctionnent dans tous les cas et conduisent, à condition d'être menées à terme, au résultat attendu) mais coûteuses plutôt que des procédures mieux adaptées au calcul en jeu. De plus, les élèves les plus en difficulté en mathématiques se limitent davantage et plus longtemps aux premières. Ils font preuve de moins d'adaptabilité.
Sans un enseignement de calcul mental visant spécifiquement à combler le manque d'adaptabilité manifesté par ces élèves, deux dynamiques peuvent s'installer dans la classe. L'absence ou la présence de prérequis numériques des élèves va initialiser ces dynamiques et conduire ou non à un déficit en termes d'apprentissage.

Retour au sommaire

Première dynamique : l'élève possède au départ suffisamment de connaissances sur les décompositions des nombres ; il va pouvoir les convoquer pour mobiliser des procédures plus économiques car plus adaptées. Il est ainsi amené à davantage explorer lors des calculs, les propriétés des nombres et les opérations. Cette exploration contribue à enrichir ses connaissances numériques, à les rendre plus disponibles et donc à accroître les possibilités d'explorer de nouvelles procédures, de les mobiliser à bon escient. Cette première dynamique est **productrice d'apprentissages.**

Seconde dynamique : en revanche, si les connaissances de l'élève sont plus limitées, il va se réfugier dans des procédures apparemment plus sûres mais beaucoup plus coûteuses et conduisant souvent à l'échec. Ce dernier réduit le nombre et la richesse des expériences numériques susceptibles d'être faites lors des activités de calcul mental et peut donc contribuer à limiter le développement des connaissances. Un déficit cognitif se creuse entre cet élève et le précédent.

Un défaut de prérequis peut donc limiter de manière importante les effets bénéfiques d'une pratique quotidienne de calcul mental. Pour être producteur de connaissances, un enseignement de calcul mental doit permettre à des procédures non standards de vivre.

Les algorithmes écrits, notamment, ne doivent pas écraser les autres procédures. Cet enseignement doit aussi avoir pour objectif de développer suffisamment de connaissances afin d'initialiser la première dynamique que nous venons de décrire et de pallier les manques éventuels. Tous les élèves sont ici concernés, mais ces manques sont particulièrement criants pour les élèves en difficulté. Ils concernent par exemple la connaissance et la disponibilité des compléments à dix, à la dizaine ou à la centaine supérieure et les décompositions multiplicatives (voir ci–dessous).

Si une familiarisation trop faible avec les propriétés spécifiques de ces nombres peut expliquer la prégnance de procédures peu adaptées, elle s'explique aussi par l'absence de procédures automatisées de traitement associées. En effet, l'élève ne pourra mobiliser rapidement la décomposition 17 = 20 – 3 (ou 17 = 5 + 12) dans le calcul 45 + 17 que si celles–ci sont disponibles. Ce qui nécessite un entraînement spécifique. L'élève doit non seulement avoir appris à décomposer ces nombres mais ces décompositions doivent avoir été automatisées.

La connaissance et la maîtrise d'un nombre insuffisant de procédures automatisées peuvent donc conduire l'élève à adopter, en calcul, un comportement automatisé. Pour dépasser ce comportement, il est nécessaire d'enrichir le panel des procédures automatisées.

L'enseignement du calcul mental est donc paradoxal : trop peu d'automatismes (au sens de trop peu de procédures automatisées) peuvent renforcer l'automatisme (au sens du comportement automatisé) ; davantage d'automatismes peuvent permettre d'échapper à l'automatisme.

La seconde partie de ce texte présente des activités qui peuvent permettre de dépasser ce paradoxe en apportant des éléments de réponse à la question : que faut–il mémoriser et quand ? Un premier élément consiste dans la mise en place progressive de procédures élémentaires automatisées de calcul. Il s'agit d'accroître les performances des élèves en enrichissant leurs connaissances numériques, en installant de nouveaux faits numériques avec une pratique régulière du calcul mental. Cela devrait les amener à restituer des faits mémorisés sans avoir à les reconstruire à chaque fois.

Ces procédures élémentaires de calcul jouent ensuite le rôle de modules de calcul intégrés dans des procédures plus riches et adaptées à d'autres nombres.

Retour au sommaire

Mais certaines conditions doivent être remplies pour que cette dynamique soit possible. Les élèves doivent savoir détecter les moments où il faut inventer et ceux où il faut reproduire, ce qui nécessite, de la part du professeur, des institutionnalisations[1] souples.

Ce dernier doit non seulement faire expliciter les procédures mobilisées mais aussi les hiérarchiser[2] et, pour certaines, institutionnaliser aussi leur domaine de validité. Une pratique régulière de calcul mental doit ainsi avoir pour objectif d'amener l'élève, non seulement à mettre en œuvre des procédures économiques, mais aussi à en percevoir le domaine d'efficacité. L'institutionnalisation souple porte à la fois sur l'économie de la procédure et sur son domaine d'efficacité. Elle ne doit pas être trop rapide ni trop forte car cela risquerait de se faire au détriment de l'adaptabilité. Elle ne doit pas être trop faible et ni trop tardive car alors toutes les procédures pourraient apparaître comme équivalentes et de ce fait, l'élève en difficulté aurait alors à choisir seul et à décoder la plus efficace ce qui pourrait l'amener à privilégier finalement les algorithmes usuels (poids social). Elle doit amener les élèves à prendre conscience de l'éventail et de la hiérarchie des procédures mises en œuvre dans la classe.

Rapports entre maîtrise de techniques opératoires et résolution de problèmes standards

Des recherches ont montré (Butlen, Pézard 2002) qu'une pratique régulière de calcul mental, en améliorant les habiletés calculatoires des élèves, se traduit, pour un certain type de problèmes standards, par une accélération du processus de reconnaissance de l'opération en jeu. Il s'agit de problèmes relevant de modèles relativement familiers aux élèves mais dont la reconnaissance n'est pas encore automatisée. Ce sont, par exemple des problèmes additifs faisant intervenir des compositions de transformations du type « le jeu de l'autobus » : Dans un autobus, il y a 28 voyageurs. À la prochaine station, 15 voyageurs montent et 17 descendent. Combien y a–t–il de voyageurs dans l'autobus quand il repart ? Ou des problèmes multiplicatifs simples : Pour réaliser un pull, Sylvie achète 18 pelotes de laine à 5 € la pelote. Calcule le montant de la dépense.

1. Le processus d'institutionnalisation a pour but de donner aux connaissances éventuellement mobilisées par les élèves un statut de savoir culturel et social. G. Brousseau précise que l'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action, que sur une situation de formulation ou de preuve. Les maîtres doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir. R. Douady et M.J. Perrin situent le processus d'institutionnalisation par rapport aux aspects outil et objet d'un concept. Dans l'information traitée, l'enseignant choisit et expose, avec les conventions en usage, ce qui est nouveau à retenir. Il fait le «cours». Ainsi, l'enseignant a la charge de donner un statut aux concepts qui, jusque–là, sont intervenus comme outils. Il constitue alors un savoir de classe auquel chacun pourra se référer.
2. Dans l'exemple ci–dessus (45 + 17), l'ordre dans lequel les procédures sont exposées correspond à une hiérarchisation locale selon le critère qui serait celui du « coût » en mémoire ou en calcul. L'adjectif « souple » qualifie le fait que ce qui est valable ici pour 45 + 17 ne le sera pas pour 45 + 15.

Retour au sommaire

Ce résultat a été établi à partir de la comparaison des performances et procédures d'élèves de CM2 entraînés régulièrement au calcul mental et celles d'élèves de classes équivalentes mais n'ayant pas suivi un enseignement aussi important dans ce domaine. Les élèves devaient résoudre un ensemble de 24 problèmes par écrit, mais aussi mentalement (4 problèmes à chaque fois). Ces problèmes s'inscrivent dans les apprentissages prévus en dernière année d'école élémentaire et portent sur des notions introduites auparavant. Ce sont des problèmes standards. Chaque problème fait intervenir une des quatre opérations arithmétiques classiques (addition, soustraction, multiplication, division). Le nombre des données numériques varie peu (2 ou 3 données). L'énoncé peut comporter ou non une donnée inutile[3]. Il s'avère important de hiérarchiser les énoncés selon le degré de familiarisation pour que se révèle un certain impact d'une pratique régulière du calcul mental.
La comparaison montre qu'un entraînement au calcul mental, en allégeant les tâches de calcul, favorise une prise de sens lors de la résolution de problèmes et contribue à accélérer l'automatisation de la reconnaissance du modèle (opération(s) en jeu).
Les automatismes de calcul installés au cours d'une pratique régulière de calcul mental permettent aux élèves de construire des schémas de problèmes (Julo, 1995). Tout se passe comme si l'élève avait construit une mémoire des problèmes déjà rencontrés ainsi que des procédures de résolution associées. Cette mémoire s'organise grâce à une certaine catégorisation et à un recours à des problèmes prototypiques représentatifs de chaque catégorie. L'élève s'avère alors capable de mobiliser à bon escient le modèle le plus adapté pour résoudre le problème.
Les résultats de recherche exposés ci–dessus montrent que maîtrise de techniques de calcul d'une part, propriétés des nombres et des opérations et sens des opérations d'autre part se construisent dialectiquement. La technique n'est pas première par rapport au sens et inversement le sens ne peut pas se construire sans technique.
Ils montrent aussi l'importance d'une programmation d'activités permettant aux élèves de construire progressivement les connaissances nécessaires et qui ménage des étapes bénéfiques pour les apprentissages notamment ceux des élèves en difficulté en mathématiques.
À cet égard, deux types d'exemples sont développés ci–dessous pour préciser ces aspects :
– des exemples d'activités de calcul mental dites « préparatoires », car ayant pour but d'amener le plus grand nombre d'élèves à développer des capacités d'adaptation (adaptation aux calculs mais aussi aux problèmes qui leur sont posés) ;
– un ensemble de situations incontournables qui permettent de structurer une programmation pour l'apprentissage de la numération des entiers naturels quel que soit le niveau d'enseignement considéré.

Quelques pistes en calcul mental et en numération : des passages incontournables

Calcul mental

Forme, contenu et fréquence des activités de calcul mental

En début de cycle 2, avant de proposer des activités qui relèvent explicitement du calcul, et pour s'y préparer, les élèves seront entraînés à des activités de « pure »

3. Nous avons, à cette occasion, défini deux degrés de complexité des problèmes (voir revue *Grand N*, n° 79, Grenoble, 2007.)

Retour au sommaire

mémorisation de nombres présentés sous différentes formes (nombres dits, l'élève les répète ; nombres écrits en chiffres montrés quelques secondes, l'élève les écrit en chiffres) puis à des activités au cours desquelles il s'agira de mémoriser et de « traiter » les données, par exemple en restituant les nombres sous une désignation différente de celle qui aura été utilisée pour les présenter (nombres dits, l'élève les écrit en chiffres ; constellations montrées, l'élève dit les nombres) ou en restituant les nombres dans un ordre imposé (nombres dits, l'élève les écrit en chiffres du plus petit au plus grand) ou en leur faisant subir une transformation (nombres dits, l'élève écrit en chiffres les suivants de chacun de ces nombres) ce qui aboutira progressivement à des activités de calcul.
Les activités de calcul mental se présentent sous deux formes différentes selon l'objectif visé prioritairement.
Chaque jour, pendant 10 à 15 minutes, il est demandé aux élèves d'effectuer mentalement des calculs donnés oralement ou écrits au tableau puis cachés. Ceux–ci disent le mot–nombre ou écrivent le résultat du calcul de l'opération en chiffres ou en mots sur leur ardoise. L'enseignant valide les calculs et corrige si besoin rapidement les erreurs. Le but prioritaire est d'entraîner les élèves au calcul, de les confronter avec des exemples variés et d'accroître leurs performances (rapidité, mémorisation, maîtrise de techniques).
Une fois par semaine, une séance un peu plus longue (de l'ordre d'une trentaine de minutes) est consacrée à l'explicitation et à la comparaison des différentes procédures mobilisées par les élèves (y compris les procédures erronées quand elles révèlent une difficulté significative). Cette comparaison débouche sur une hiérarchisation des connaissances des élèves et des données intervenant dans les calculs. Le professeur s'attache alors à mettre en regard l'économie de certaines procédures et les propriétés des nombres en jeu. Il s'agit de capitaliser l'exploration effectuée dans les activités précédentes. Le nombre des calculs alors demandés aux élèves est nettement moins important que dans les activités précédentes. Si besoin, le professeur peut introduire ou rappeler certaines procédures jugées efficaces qui n'auraient pas été énoncées par les élèves.
À titre d'exemples, voici, plus précisément, quelques types d'activités portant sur l'addition et la soustraction. Des activités du même type sont à proposer pour la multiplication et la division.

Types d'activités : additions et soustractions

Il s'agit de trois séries d'activités[4] de calcul mental. Une première série d'activités, plus traditionnelles, revient à explorer, mémoriser et tester les tables d'additions. Une deuxième série d'activités porte sur la recherche de compléments à dix, cent, mille, etc. Une troisième concerne davantage les additions et soustractions mentales.

• Les tables d'addition

Les résultats des tables d'addition deviendront progressivement des faits numériques automatisés[5]. Certains s'acquièrent plus vite que d'autres (n + 1, n + n) ; certaines désignations (par exemple, les constellations ou les doigts dans le cas

4. Nous présentons ici uniquement les calculs élémentaires à automatiser et les faits numériques à mémoriser. Pour les aborder, le professeur aura recours à différents types de matériels et différents modes de gestion.
5. Le temps de réponse peut être un indice pour repérer un fait numérique automatisé ; toutefois, pour l'addition notamment, il n'est pas toujours évident de distinguer si un élève a mémorisé un résultat ou s'il le reconstruit très vite.

Retour au sommaire

de 5 + n avec n compris entre 1 et 5) peuvent aider à en « voir » quelques–uns. Mais ce n'est pas toujours la taille des nombres qui rend le calcul plus difficile (ainsi 5 + 5 est plus vite mémorisé que 4 + 3).

Deux types d'activités permettent d'explorer particulièrement et de mémoriser les faits numériques relevant des tables d'addition.

Le premier type est constitué de jeux de calcul mental utilisant différents supports : jeux de cartes (bataille, mariages, recto verso…), jeux de dominos, lotos, labyrinthes, etc. (différents ouvrages détaillent ces jeux).

Un second type d'activités a aussi pour objectif la mémorisation des tables, il convient de distinguer :

– la recherche de la somme ou de la différence : 8 + 7 = ? 9 – 3 = ?

– la recherche de l'un des termes de la somme ou de la différence : 9 + ? = 14
7 –> 14 8 – ? = 5 ? – 7 = 4

– la recherche des deux termes de la somme ou de la différence : ? + ? = 18
? – ? = 6

• Recherche de compléments

Dans ces exemples, le jeu sur les données numériques et la nature du questionnement associé sont spécifiés.

Compléter à 10 :

Servant de base à de nombreuses procédures de calcul réfléchi, les cinq paires de nombres non nuls dont la somme est 10 sont à connaître suffisamment tôt. Les différentes représentations des nombres (constellations, doigts des mains, etc.) contribuent à leur mémorisation.

Afin de rendre disponibles différentes décompositions d'un nombre, dans cette activité mais aussi dans beaucoup d'autres, le professeur pourra jouer sur la formulation de la consigne. En effet, chaque consigne privilégie un point de vue (compléter une collection, se déplacer sur la droite numérique, égaliser deux collections, etc.). Ces changements de point de vue participent de la construction du nombre et contribuent à accroître la disponibilité des faits numériques.

Complète 3 pour faire 10.
Combien manque–t–il à 3 pour faire 10 ?
Que faut–il ajouter à 3 pour faire 10 ?
3 pour aller à 10 ?
3 –> 10 ?
3 + ? = 10
10 – 3 = ? Etc.

Ces variations de consigne concernent aussi les activités suivantes qui constituent à la fois un moment de réinvestissement et de développement des connaissances construites et automatisées lors de la recherche des compléments à 10.

Compléter à la dizaine supérieure :

14 –> 20 32 –> 40 53 –> 60

Compléter à 100 ou à la centaine supérieure :

30 –> 100 54 –> 100 327 –> 400 1350 –> 1400

Trouver le complément quand il s'agit de 10 ou d'un multiple de 10, voire de 100 :

32 –> 42 48 –> 78 25 –> 325 1235 –> 1635

• Autres activités

Ici, il s'agit de procédures automatisées liées le plus souvent à la spécificité de notre système de numération dont l'usage rend certains calculs plus faciles que d'autres.

Retour au sommaire

Ajouter 10 ou un nombre entier de dizaines à un nombre de deux ou trois chiffres :
55 + 10 257 + 10 497 + 10
60 + 30 38 + 60 40 + 122 265 + 40
Soustraire 10 ou un nombre entier de dizaines à un nombre de deux ou trois chiffres :
64 – 10 55 – 30 238 – 40
Ajouter ou soustraire 100 ou un nombre entier de centaines à un nombre de trois ou quatre chiffres :
325 + 100 1234 + 500 325 – 100 1234 – 200
4500 – 600 1370 – 500
Trouver le plus rapidement possible le résultat d'une addition en ligne :
27 + 4 + 15 + 3 + 5
Décomposer additivement un nombre en un nombre entier de centaines, dizaines et unités (décomposition canonique) :
34 = 30 + 4 327 = 300 + 20 + 7 1004 = 1000 + 4
Exprimer un nombre en faisant intervenir la dizaine, la centaine supérieure, etc. :
47 = 50 – 3 47 = 100 – 53
Compléter des égalités du type :
37 + 18 = 47 + ? 54 + 27 = 74 + ?
– en utilisant la décomposition décimale du second terme ;
27 + 8 = 30 + ?54 + 27 = 60 + ? 54 + 27 = 80 + ?
128 + 15 = 130 + ? 128 +15 = 140 + ?
– en faisant apparaître dans le calcul un multiple de 10 ou 100.

Numération : des passages incontournables

Concernant les différentes notions mathématiques à aborder au cycle 2, il est important d'identifier les passages incontournables et les étapes qui font relativement consensus et qui seront ensuite prolongées, enrichies pour aborder les apprentissages ultérieurs. Pour illustrer cette idée, l'exemple des notions liées à la numération est particulièrement bien adapté car on peut identifier au moins cinq types de situations de référence (situations incontournables) que l'on peut catégoriser comme suit. Elles sont reprises aux différents niveaux de la scolarité en adaptant le domaine numérique.
Afin de préciser un point faible de l'enseignement actuel, les situations portant sur le lien entre numération écrite (chiffrée) et numération orale (les mots–nombres prononcés ou écrits) sont davantage détaillées. Ces situations seront traitées dans les différents niveaux de classe, sur des domaines numériques différents. Il n'y a pas un ordre absolu de traitement, chaque situation enrichit les connaissances précédemment construites.

Les situations d'échange pour travailler l'écriture chiffrée du nombre

Si cette situation participe de la construction du nombre, l'objectif porte davantage sur les écritures, les désignations des nombres que sur les calculs sur ces nombres.
Ces situations sont incontournables au cycle 2. Elles permettent d'explorer les règles d'échanges qui justifient le système de numération de position : un même chiffre selon sa position désigne des quantités différentes ou des quantités identiques mais correspondant à des ordres différents. Au cycle 2 ce sont en particulier les situations de type « jeu du banquier ». L'évolution se traduit au niveau de la

Retour au sommaire

règle d'échanges (un contre cinq, puis rapidement un contre dix). Elles préparent et s'enrichissent avec tout le travail sur la monnaie.

Les situations de groupements

Pour les CP, il s'agira de construire des stratégies pour dénombrer rapidement et de manière fiable des collections de 60 à 100 objets et au CE de plusieurs centaines voire milliers d'objets[6]. Ces situations amènent à constater que l'utilisation des paquets de dix (notons que le nombre dix relève ici d'une convention imposée par notre système de numération) puis des paquets de paquets va faciliter la détermination de l'écriture du cardinal qui pourra être d'abord traduit sous la forme d'une écriture additive. L'évolution du CP au CM2 se fait au niveau du passage de collections réelles à des collections représentées sous différentes formes[7].

Les situations amenant à repenser les groupements par rapport aux échanges

Il s'agit d'amener les élèves à lire dans l'écriture d'un nombre des informations liées aux échanges ou aux groupements qui ont été effectués. La situation de référence est par exemple le problème des timbres : les timbres sont vendus par carnets de dix timbres. Paul a besoin de 260 timbres. Combien doit–il acheter de carnets ? Paul a besoin de 260 timbres. Combien doit–il acheter de carnets ? Corinne a besoin de 500 timbres. Combien doit–elle acheter de carnets ?
On constate un déficit en CE2 et en sixième. Par exemple, à la question : dans 238, combien de paquets de dix ?, 50 % réussissent à répondre en CE2 mais peu lisent directement la réponse « sur le nombre ». En sixième, on observe 80 % de réussite et seulement un élève sur deux mobilise des connaissances sur la numération.

Les situations abordant le point de vue algorithmique (dans les deux systèmes de numération)

Toutes les activités autour des compteurs (avec des chiffres ou avec des mots) et des calculatrices entrent dans cette catégorie en liaison avec l'utilisation des abaques. Il s'agit d'un travail autour des familles de nombres comme dans la situation du « jeu du château » en CP / CE1 (cf. ERMEL[8]), ou autour de la spirale des nombres. La structuration des nombres est également en jeu dans les situations utilisant la droite numérique.

Les situations d'exploration des règles de la numération orale et de mise en relation avec la numération de position (chiffrée)

Il s'agit de travailler avec les élèves sur ce qui distingue les deux systèmes de numération.
Certaines activités sont indispensables à des apprentissages futurs. Elles mettent en jeu des connaissances qui ne sont pas toujours reconnues comme des savoirs à enseigner par l'institution scolaire. Briand a montré[9] que c'était le cas pour l'énu-

6. Il est important de proposer des collections suffisamment importantes pour amener les élèves à abandonner des procédures de comptage de 1 à n et légitimer les procédures de groupements par dix.
7. Par exemple dans ERMEL les situations « les fourmillions » (CP), « les cahiers » (CE1), « les craies » (CE2), « les trombones » (CM1) et « les tickets de cantine » (CM2) entrent dans cette catégorie.
8. ERMEL, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes : GS, CP, CE1*, Paris, INRP/Hatier, 2001.
9. Cf. Briand, 1994.

mération. Les élèves en difficulté issus de milieux socialement défavorisés ne peuvent bénéficier d'un environnement familial et culturel prenant en charge ces apprentissages en lieu et place de l'école.
Cela nous semble être le cas de l'apprentissage de la numération écrite avec des mots – appelée par certains « numération orale » – et du passage de la numération de position chiffrée à la numération orale.
Ces deux systèmes fonctionnent différemment[10]. Les règles d'écriture et de lecture ne sont pas les mêmes. L'enfant de CP doit apprendre en même temps les deux systèmes et acquérir des automatismes. Il doit penser « 80 » et donc voir les chiffres « 8 »et « 0 » en entendant quatre–vingt.
L'activité scolaire la plus fréquente abordant cette question est la dictée de nombres. L'élève doit alors apprendre et explorer, en même temps qu'il doit les restituer, les règles qui permettent de traduire dans l'un des systèmes l'écriture d'un nombre écrit dans l'autre système. Non seulement l'apprentissage de la numération orale n'est pas assez systématisé, mais il semble même relever, pour une large part, d'apprentissages effectués dans un cadre extrascolaire. Voici d'autres exemples de situations scolaires permettant ces apprentissages.

• Construire un dictionnaire de nombres

Il s'agit dès le CP de construire un livret dédié à l'écriture des nombres. Chaque page est consacrée à un nombre. L'élève y inscrit différentes écritures ou représentations de ce nombre. Les pages vont s'enrichir progressivement. À partir du CE1, les élèves construisent un dictionnaire collectif des nombres dont certaines pages sont affichées sur les murs de la classe. Le professeur se contente d'étudier certains nombres particuliers comme : cent, cent un, cent dix, cent vingt, deux cents, trois cents, mille, mille un, mille cent, un million, etc.

• Comparer deux compteurs

L'activité permet de repérer si un élève maîtrise davantage la numération chiffrée de position ou la numération orale. L'élève dispose de deux jeux de cartes. Le premier comporte des cartes sur lesquelles sont inscrits les chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 servant à écrire les nombres dans le système de numération chiffrée de position. Le second est le jeu de cartes avec les mots–nombres.

La consigne est la suivante : utilise les deux jeux de cartes. Écris la suite des nombres que tu connais en commençant par zéro. À gauche, tu écris avec des chiffres ; à droite, tu écris avec des mots.

10. Le système de numération de position chiffrée en base dix, utilise les dix chiffres : 0, 1, ..., 8, 9. Il suffit d'écrire dans le bon ordre les chiffres 2, 4, 6 et 9 pour désigner le nombre 2469. La position du chiffre indique l'exposant de la puissance de dix correspondant :
$2469 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
Les opérations implicites sont des multiplications et des additions. L'ordre est évidemment indispensable à l'écriture et à la lecture des nombres dans ce système (d'où son nom). Ce système permet d'écrire sans ambiguïté tous les nombres entiers avec 10 chiffres seulement. Le système de numération orale (ou encore écrite avec des mots) est un système polynomial. Dans ce système, nous écrivons le nombre 2469 : deux mille quatre cent soixante–neuf. Les mots ne désignent pas les mêmes objets, certains désignant des coefficients multiplicatifs de la puissance de la base, d'autres désignant les puissances de la base correspondante et d'autres encore désignant une concaténation des deux. Les opérations implicites sont aussi des multiplications et des additions. Localement nécessaire, l'ordre correspond davantage à une nécessité sociale qu'à une nécessité mathématique. Contrairement au système précédent, il n'est pas possible d'écrire tous les nombres entiers car il faut une infinité de mots pour désigner la suite infinie des puissances successives de 10. Il faut alors inventer une nouvelle règle permettant de générer ces mots.

Retour au sommaire

Il est ainsi possible de repérer les difficultés de l'élève et de savoir s'il maîtrise davantage un système plutôt que l'autre.
Les erreurs comme les hésitations deviennent fréquentes à partir de soixante–dix. Cet exercice est à la fois un test et une activité d'apprentissage, on observe en effet que des élèves momentanément bloqués dans un système, recouraient à l'écriture du nombre dans l'autre système pour retrouver (voire reconstruire) l'écriture faisant défaut.

0	Zéro
1	Un
2	Deux
3	Trois
….	….
69	Soixante–neuf
70	Soixante–dix
71	Soixante–et–onze
72	Soixante–douze

• Simuler un « compteur manuel » permettant d'écrire les nombres avec des mots

L'activité[11] est proche de la précédente. Un nombre n est écrit avec des mots (cartes), par exemple :
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire avec des mots le prédécesseur n–1 de ce nombre ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le successeur n+1 de ce nombre ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre n+10 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre n+100 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre n+1000 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre n+10n ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre nx10 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre nx100 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre nx1000 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre nx10n ?

Deux	mille	trois	cent	vingt	quatre

Le professeur fait repérer les régularités et les ruptures dans les écritures ainsi générées. En particulier, il attire l'attention de l'élève sur les variations de la longueur de ces écritures ; il fait repérer des règles locales.
La simulation d'un compteur permet aussi d'étudier les variations des écritures quand on ajoute une unité au nombre de départ, et ce plusieurs fois de suite.

11. Cette activité a été conduite à tous les niveaux de l'école primaire ; les nombres et les opérations proposées correspondent au domaine numérique fréquenté.

Retour au sommaire

• Combien de chiffres ? Combien de mots ?

Un nombre étant énoncé par le professeur, l'élève écrit sur son ardoise le nombre de chiffres nécessaires pour l'écrire. Inversement, un nombre étant écrit au tableau avec des chiffres, l'élève doit écrire sur son ardoise le nombre de mots nécessaires. L'institutionnalisation porte sur la longueur de l'écriture d'un nombre qui ne dépend pas systématiquement de sa grandeur : le nombre « deux cent vingt trois » comporte plus de mots que le nombre « un million ».

• Écrire avec des chiffres ce que l'on entend

Le professeur énonce un nombre, par exemple : deux mille trois cent vingt–sept. L'élève écrit avec des chiffres les nombres entendus et puis retrouve l'écriture chiffrée canonique à l'aide d'un arbre de calcul.

Bibliographie

- **BOULE F.,** *Performances et démarches de calcul mental au cycle III. Éléments pour une pédagogie du calcul mental*, Thèse de doctorat, Villeneuve d'Ascq, Presses universitaires du Septentrion, 1997.
- **BUTLEN D., PEZARD M.,** *Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique*, revue *Grand N*, n° 79, Grenoble, 2007.
- **BUTLEN D.,** *Calcul mental, entre sens et techniques, des difficultés des élèves aux élèves en difficulté*, Besançon, Presses Universitaires de Franche Comté, 2004.
- **BUTLEN D., PEZARD M.,** *Une contribution à l'étude des rapports entre habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège*, Spirale, Revue de Recherches en Éducation, vol. 31, Lille, 2003, p. 117–140.
- **BUTLEN D., PEZARD M.,** *Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2*, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 12.2.3, 319–368, Grenoble, La Pensée Sauvage, 1992.
- **FAYOL M.,** *Nombre, numération et dénombrement. Que sait–on de leur acquisition ?*, Revue Française de Pédagogie n° 70, Paris, INRP, 1985, p. 59–77.
- **FAYOL M., MONTEIL J.–M.,** *Stratégies d'apprentissages/apprentissages de stratégies*, Revue Française de Pédagogie, n° 106, Paris, INRP, 1994, p. 91–110.
- **FISCHER J.–P.,** *L'automatisation des calculs élémentaires à l'école*, Revue Française de Pédagogie n° 80, Paris, INRP, 1987, p. 17–24.
- **JULO J.,** *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes, 1995.
- **VERGNAUD G.,** *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang, 1981.
- **VERGNAUD G., DURAND C.,** *Structures additives et complexité psychogénétique*. Revue Française de Pédagogie, 36, 1976, pp. 28–43.

Retour au sommaire